Balanční vlastnosti pevného bodu substituce

Karel Břinda Edita Pelantová

Theoretical **I**nformatics **Gr**oup
FJFI ČVUT v Praze

14. prosince 2010

Schéma postupu

Abelovská komplexita

$\updownarrow$

Balanční funkce

$\updownarrow$

Diskrepanční funkce

$\updownarrow$

Funkce $S_u^f(N)$

$\updownarrow$

Matice primitivní substituce

Značení

- Abeceda $\mathcal{A} = \{1, \ldots, d\}$
- Nekonečné slovo u
- Konečné slovo ω
- Vektor frekvencí $\mu = (\mu(a))_{a \in \mathcal{A}}$, kde $\mu(a) = \lim_{N \to +\infty} \frac{|u_0 u_1 \cdots u_{N-1}|_a}{N}$; pro pevné body primitivních substitucí existuje
- Množina faktorů slova u $\mathcal{L}$
- Množina faktorů délky n slova u $\mathcal{L}_n$

Úvodní definice

Definice (Balanční funkce)

Balanční funkci definujeme jako

$$B_N(u) = \max_{a\in\mathcal{A}} \max_{w,w'\in\mathcal{L}_N(u)} \{||w|_a - |w'|_a|\}.$$

Pokud je $B_u(n)$ omezená číslem C, říkáme, že u je C-balancované. Řekneme, že u je balancované, pokud je 1-balancované.

Definice (Abelovská komplexita)

Abelovskou komplexitou nekonečného slova u rozumíme funkci

$$\mathcal{AC}(n) = \#\{\psi(w) | w \in \mathcal{L}_n\},$$

kde $\psi(w) = (|w|_a)_{a\in\mathcal{A}}$.

Úvodní definice

Definice (Diskrepanční funkce)

Diskrepanční funkcí (pro pevný bod primitivní substituce) myslíme funkci

$$D_N(u) = \max_{a \in \mathcal{A}} \Big| |u_0 \cdots u_{N-1}|_a - N\mu(a) \Big|.$$

Úvodní definice

Definice (Landauovy symboly)

- $f = \mathcal{O}(g)$, *pokud existuje* $C > 0$ *takové, že*

$$f(x) < C \cdot g(x) \ \forall x > 0.$$

- $f = o(g)$, *pokud*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- $f = \Omega(g)$, *pokud*

$$f \neq o(g), \ \textit{tj.} \ \limsup_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

- $f = (\mathcal{O} \cap \Omega)(g)$, *pokud*

$$f = \mathcal{O}(g) \wedge f = \Omega(g).$$

Vztahy mezi abelovskou komplexitou a balanční funkcí

Věta

Abelovská komplexita nekonečného slova je omezená $\Leftrightarrow$ jeho balanční funkce je omezená (tedy je C-balancované pro nějaké C).

Věta

Pro nekonečné slovo u nad **binární** *abecedou platí:*

$$\mathcal{AC}(n) = B_n(u) + 1.$$

Balanční funkce omezená ⇔ diskrepanční funkce omezená

Věta

Nechť u je nekonečné slovo. Potom platí:

$$B_N(u) \text{ je omezená } \Leftrightarrow D_N(u) \text{ je omezená.}$$

Balanční funkce → diskrepanční funkce

Věta

Nechť u je nekonečné slovo, nechť existuje $\mu = (\mu(a))_{a \in \mathcal{A}}$ *a nechť*

$$B_N(u) = \mathcal{O}(f(N)).$$

Potom platí

$$D_N(u) = \mathcal{O}(f(N)).$$

Věta platí i pro o místo $\mathcal{O}$.

Balanční funkce ←-- diskrepanční funkce

Lemma (Ukázka nefunkčnosti v tomto směru)

Nechť f je reálná rostoucí neomezená funkce taková, že $f(N) = o(N)$. Potom existuje nekonečné slovo u nad abecedou $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ splňující:

- *pro u existuje $\mu = (\mu(a))_{a \in \mathcal{A}}$;*
- *$D_N(u) = \mathcal{O}(f(N))$;*
- *$\forall N \ B_u(N) = N$.*

Balanční funkce ←-- diskrepanční funkce

Věta

Nechť u je nekonečné lineárně rekurentní slovo. Pokud existuje sublineární rostoucí funkce f taková, že

$$D_N(u) = \mathcal{O}(f(N)),$$

potom platí

$$B_N(u) = \mathcal{O}(f(N)).$$

Věta platí i pro o místo $\mathcal{O}$.

Definice

Nechť u je nekonečné slovo, f je zobrazení $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ a $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Potom definujeme

$$S_u^f(N) = \sum_{a \in \mathcal{A}} |u_0 \cdots u_{N-1}|_a f(a).$$

V případě konečného slova ω definujeme

$$S^f(\omega) = \sum_{a \in \mathcal{A}} |\omega|_a f(a).$$

Definice

Nechť u je nekonečné slovo a existuje μ. Potom pro $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ zavedeme vektory f_i následovně:

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } i = j; \\ \frac{\mu(i)}{\mu(i)-1} & \textit{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $D_N(u) = \mathcal{O}(g(n))$, *resp.* $o(g(n))$;
- $\left(\forall f = (f(i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d\right) (f \perp \mu)$:

$$S_u^f(N) = \mathcal{O}(g(N)), \text{ resp. } o(g(N)).$$

V prvním tvrzení závisí konstanta v $\mathcal{O}$ na u, ve druhém tvrzení na u a na f.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $D_N(u) = \Omega(g(N))$;
- $\left(\exists f = (f(i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^d\right) (f \perp \mu)$:

$$S_u^f(N) = \Omega(g(N)).$$

Uspořádání spektra

Věta (Perronova-Frobeniova)

Nechť A je nezáporná ireducibilní matice. Pak její spektrální poloměr $\rho(A)$ je vlastním číslem matice A s algebraickou násobností 1. Vlastní vektor k $\rho(A)$ lze volit kladný. Žádnému jinému vlastnímu číslu neodpovídá nezáporný vlastní vektor.

Pokud tento vektor budeme volit tak, že součet jeho složek bude 1, bude se jednat o vektor frekvencí.

Uspořádání spektra

$$S_{M_\varphi} = \{\theta_i \mid 2 \leq i \leq d'\} \cup \{\theta_1 = \theta\}$$

Násobnost vlastního čísla θ_i v minimálním polynomu M_φ označme α_i.

$$\forall i < k \in \{2, \ldots, d'\} : \begin{cases} |\theta_i| > |\theta_k| \\ \text{nebo} \\ |\theta_i| = |\theta_k| \wedge \alpha_i \geq \alpha_k \end{cases}$$

Další dodatečná podmínka: $|\theta_i| = |\theta_k| = 1 \wedge \alpha_i = \alpha_k \wedge \theta_i$ není kořenem jednotky $\wedge\ \theta_k$ je kořenem jednotky $\Rightarrow i < k$.
Jednoznačně určené: $\theta, |\theta_2|, \alpha_2$.

Horní odhad

Věta

Nechť u je pevným bodem primitivní substituce. Potom:

- *pokud* $|\theta_2| < 1$, *pak* $D_N(u)$ *je omezená;*
- *pokud* $|\theta_2| > 1$, *pak* $D_N(u) = \mathcal{O}\left((\log N^{\alpha_2 - 1}) N^{\log |\theta_2| / \log \theta}\right)$;
- *pokud* $|\theta_2| = 1$, *pak* $D_N(u) = \mathcal{O}\left(\log N^{\alpha_2}\right)$.

Konstanty v $\mathcal{O}$ *závisí pouze na* u.

Dolní odhad

Věta

Nechť u je pevným bodem primitivní substituce. Pokud $|\theta_2| \geq 1$, potom

$$D_N(u) = \Omega\left((\log N^{\alpha_2 - 1}) N^{\log |\theta_2| / \log \theta} \right).$$

Kritické případy

Věta

Nechť u je pevným bodem primitivní substituce. Pokud $|\theta_2| = 1$ a θ_2 není kořen jednotky, pak

$$D_N(u) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2}\right).$$

Věta

Nechť u je pevným bodem primitivní substituce φ. Pokud θ_2 není kořenem jednotky, pak:

- $A_{\varphi,u} \neq 0 \Rightarrow D_N(u) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2}\right);$
- $A_{\varphi,u} = 0 \Rightarrow D_N(u) = (O \cap \Omega)\left((\log N)^{\alpha_2 - 1}\right).$

Věta (Adamczewski)

Nechť U je pevným bodem primitivní substituce φ. Potom platí:

1. *pokud $|\theta_2| < 1$, pak $B_N(u)$ je omezená;*
2. *pokud $|\theta_2| > 1$, pak $B_N(u) = (O \cap \Omega)((\log N)^{\alpha_2 - 1} N^{\log_\theta |\theta_2|})$;*
3. *pokud $|\theta_2| = 1$ a θ_2 není kořenem jednotky, pak $B_N(u) = (O \cap \Omega)((\log N)^{\alpha_2})$;*
4. *pokud $|\theta_2| = 1$ a θ_2 je kořenem jednotky, pak*
   - $B_N(u) = (O \cap \Omega)((\log N)^{\alpha_2})$, *pokud* $A_{\varphi,u} \neq 0$;
   - $B_N(u) = (O \cap \Omega)((\log N)^{\alpha_2 - 1})$, *pokud* $A_{\varphi,u} = 0$.

Konstanta $A_{\varphi,u}$ závisí na (φ, u).

Důsledek

Nechť u je pevným bodem primitivní substituce φ. Pak má u balanční funkci omezenou právě tehdy, když platí jedno z následujících tvrzení:

- $|\theta_2| < 1$;
- $|\theta_2| = 1$, $\alpha_2 = 1$, θ_2 *je kořenem jednotky a* $A_{\varphi,u} = 0$.

Reference

B Adamczewski.
Balances for fixed points of primitive substitutions.
THEORETICAL COMPUTER SCIENCE, 307(1):47–75, SEP 26 2003.
3rd Conference on WORDS, PALERMO, ITALY, SEP, 2001.

B Adamczewski.
Symbolic discrepancy and self-similar dynamics.
ANNALES DE L INSTITUT FOURIER, 54(7):2201+, 2004.